УДК 539.3

ЗАДАЧА О СВОБОДНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НАГРУЖЕННОЙ ОСЕВЫМИ СЖИМАЮЩИМИ СИЛАМИ ЗАПОЛНЕННОЙ СРЕДОЙ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

И.М.ДЖАФАРОВА

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

İrada-Cafarova@hotmail.com

Одна из основных причин, побуждающая конструкторов подкреплять заполненные средой тонкие оболочки ребрами, обусловлена необходимостью обеспечения их жесткости под действием различного вида нагрузок.

Работа посвящена исследованию свободных осесимметричных колебаний конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек с заполнителем, когда оболочка усилена дискретно распределенными перекрестными системами ребер, находится в состоянии осевого сжатия и учитывается трение на контактной поверхности оболочки и заполнителя. Проведен анализ влияния параметров внешней среды на параметры частоты собственных колебаний системы. Построены зависимости частоты собственных колебаний от волнообразования в продольном направлении.

Ключевые слова: осесимметрические колебания, ребристая цилиндрическая оболочка, конструктивно-ортотропная цилиндрическая оболочка.

Описание в литературе решения подобных задач относится преимущественно к подкрепленной цилиндрической оболочке без наличия заполнителя $[1]$. Колебания гладких цилиндрических оболочек с заполнителем достаточно полностью исследованы в работах $[2,3]$. В работе $[4]$ исследованы колебания цилиндрических оболочек, усиленными продольными ребрами и заполненной упругой средой. Неосесимметричные колебания ребристых цилиндрических оболочек с заполнителем и с учетом трения на контакте между оболочкой и заполнителем достаточно полностью исследованы в работах $[5,6]$.

Система осесимметричных уравнений движения заполненной средой, конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки с учетом начальных напряжений, согласно $[1]$, имеет вид:

$$\left(1+\gamma_c^{(1)}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\left(\nu\frac{\partial}{\partial\xi}+\delta_c^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\right)w-\rho_1\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}=\frac{R^2\left(1-\nu^2\right)}{Eh}q_x,$$

$$-\left(\nu\frac{\partial}{\partial\xi}+\delta_c^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\right)u+\left[1+\gamma_s^{(2)}+\eta_{s1}^{(2)}+a^2\Delta\Delta+\eta_c^{(1)}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+\overline{p}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]w+ \quad (1)$$

$$+\rho_3\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}=\frac{R^2\left(1-\nu^2\right)}{Eh}q_z,$$

здесь

$\rho_1=1+\overline{\rho}_c\overline{\gamma}_c^{(1)},\ \rho_2=1+\overline{\rho}_s\overline{\gamma}_s^{(2)},\ \ \rho_3=1+\overline{\rho}_c\overline{\gamma}_c^{(2)}+\overline{\rho}_s\overline{\gamma}_s^{(2)},$

$\overline{\gamma}_c^{(1)}=\varphi_1^1$ (φ_1^1 - отношение веса всех ребер к весу оболочки), $\overline{\gamma}_s^{(2)}=\dfrac{F_s}{L_1 h}\left(1+k_2\right)$, $\delta_s^{(2)}=\dfrac{h_s}{R}\overline{\gamma}_s^{(2)}$, $\gamma_s^{(2)}=\dfrac{E_s\left(1-\nu^2\right)}{E}\overline{\gamma}_s^{(2)}$, $\overline{\rho_c}=\dfrac{\rho_c}{\rho_0}$, $\overline{\rho}_s=\dfrac{\rho_s}{\rho_o}$ (ρ_0, ρ_c,ρ_s- плотности материалов оболочки и ребер, соответственно), $\delta_c^{(1)}=\dfrac{h_c}{r}\gamma_c^{(1)}$, $\gamma_c^{(1)}=\dfrac{E_c}{E}\left(1-\nu^2\right)\overline{\gamma}_c^{(1)}$, E,ν- модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, R - радиус срединной поверхности оболочки, E_s,E_c- модуль упругости материала ребер, $a^2=\dfrac{h}{12R^2}$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}$, $\eta_c^{(1)}=\dfrac{E_c\left(J_{yc}+h^2F_c\right)k_1}{2\pi R^3 hE}\left(1-\vartheta^2\right)$, $\delta_s^{(2)}=\dfrac{h_s}{R}\overline{\gamma}_s^2$,

$\eta_{s1}^{(2)}=\dfrac{E_sJ_{xs}\left(1-\nu^2\right)\left(1+k_1\right)}{EL_1R^2h}$, $\eta_{s2}^{(2)}=\dfrac{E_s\left(1-\nu^2\right)}{E}\overline{\eta}_s^{(2)}$, $\overline{\eta}_s^{(2)}=\left(\dfrac{h_s}{R}\right)^2\overline{\gamma}_s^{(2)}$,

L_1- длина оболочки, k_1- число продольных ребер, J_{xs}- момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси ox, F_c,F_s, J_{yc} - площадь и момент инерции поперечного сечения ребра, соответственно, относительно оси oz, $\xi=\dfrac{x}{R}$, u,w- составляющие перемещений срединной поверхности оболочки, $t_1=\omega_0 t$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{E}{\left(1-\nu^2\right)\rho_0R^2}}$, k_2-число поперечных ребер, $\overline{p}=p\left(1+\overline{\gamma}_c^{(1)}\right)$, $p-$осевая сила, q_x,q_z- давление со стороны заполнителя на оболочку и сила трения. Здесь индексы «c» относятся к продольному, а индексы «s» к поперечному ребру.

Уравнения движения среды в векторной форме имеет вид [2]:

$$a_e^2 qraddiv\vec{s} - a_t^2 rotrot\vec{s} + \omega^2 \vec{s} = 0, \tag{2}$$

здесь $a_t = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $a_e = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ - скорости распространения, соответственно, продольных и поперечных волн в среде; $\vec{s}\left(s_x, s_z\right)$- вектор перемещения, λ, μ -коэффициенты Ламе, ρ- плотность материала среды.

Уравнения движения оболочки (1) и среды (2) дополняются контактными и граничными условиями. Предположим, что контакт между оболочкой и средой является жестким, т.е. при $r = R$

$$q_x = -\sigma_{rx} + f\sigma_{rr}, \quad q_z = -\sigma_{rr}, \; u = s_x, \quad w = s_r. \tag{3}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{rx}, σ_{rr} определяются следующим образом [2]

$$\sigma_{rx} = \mu\left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x}\right); \; \sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rs_r\right)}{\partial r}\right) + 2\mu\frac{\partial s_x}{\partial r}, \tag{4}$$

здесь f −коэффициент трения.

Дополняя контактными условиями (3) уравнения движения оболочки (1) и среды (2) приходим к задаче о собственных колебаниях нагруженными осевыми сжимающими силами подкрепленной перекрестной системой ребер оболочки, заполненной средой. Другими словами, задача о собственных колебаниях нагруженными осевыми сжимающими силами конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной средой, сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек и среды при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Решение задачи. Перемещения шарнирно опертой оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin k^* \xi \sin \omega_1 t_1, \\ w &= w_0 \cos k^* \xi \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \tag{5}$$

здесь u_0, ϑ_0, w_0 −неизвестные постоянные; k^* −волновое число в продольном направлении, $\omega_1 = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Решение уравнения движения упругой среды (2) будем рассматривать в двух вариантах: а) влияние инерционного действия заполнителя на процесс колебаний несущественно; б) влияние инерционного действия заполнителя на процесс колебаний существенно и им пренебречь нельзя.

В случае а) решение системы примем в виде [2]:

$$s_x = \left[\left(-k^2 r I_1(kr) - 4(1-\nu_s) k I_0(kr)\right) A_s + k I_0(kr) C_s\right] \sin kx \sin \omega t,$$
$$s_r = \left[-k^2 r I_0(kr) A_s + k I_1(kr) C_s\right] \sin kx \sin \omega t. \tag{6}$$

Решения системы (2) в случае б) имеет вид [2]:

$$s_x = \left[A_s k I_0(\gamma_e r) - \frac{C_s \gamma_t^2}{\mu_t} I_0(\gamma_t r)\right] \cos kx \sin \omega t,$$
$$s_r = \left[A_s \gamma_e I_1(\gamma_e r) - \frac{C_s \gamma_t k}{\mu_t} I_1(\gamma_t r)\right] \sin kx \sin \omega t, \tag{7}$$

здесь $\gamma_t^2 R^2 = k^{*2} - \dfrac{\omega^2 R^2}{a_t^2}$, $\gamma_l^2 R^2 = k^{*2} - \dfrac{\omega^2 R^2}{a_l^2}$, $kR = k^*$, $\omega -$ частота колебаний.

После подстановки (5) в (1), с учетом (3), (4), (6) и (7), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

в случае а):

$$\left(-k^{*2} I_1(k^*) - 4(1-\nu_s) k^* I_0(k^*)\right) A_s + k^* I_0(k^*) C_s = A,$$

$$-k^{*2} I_0(k^*) A_s + k^* I_1(k^*) C_s = C,$$

$$\left(-k^{*2}\left(1+\gamma_c^{(1)}\right) + \omega_1^2\right) A + \left(\nu k^* + \delta_c^{(1)} k^{*3}\right) C + \frac{(1-\nu^2)\mu_s}{Eh_*} \times$$
$$\times \left[2k^* I_0(k^*) + 4(1-\nu_s) I_1(k^*)\right] k^{*2} A_s - \frac{(1-\nu^2)\mu_s}{Eh_*} 2k^{*2} I_1(k^*) C_s = 0, \tag{8}$$
$$-\left(k^*\nu + \delta_c^{(1)} k^{*3}\right) A + \left(1 + \gamma_s^{(2)} + \eta_{s1}^{(2)} + \eta_c^{(1)} k^{*4} + a^2 k^{*4} - k^{*2}\overline{p} - \omega_1^2\right) C +$$
$$+\frac{2(1-\nu^2)\mu_s}{Eh_*}\left[(2\nu_s - 1) I_0(k^*) - I_1(k^*)\right] k^{*2} A_s + \frac{2(1-\nu^2)\mu_s}{Eh_*}\left[k^* I_0(k^*) - I_1(k^*)\right] k^* C_s = 0;$$

в случае б):

$$A_s k^* I_0\left(\gamma_l^*\right) - \frac{C_s \gamma_t^{*2}}{\mu_t^*} I_0\left(\gamma_t^*\right) = A; \qquad A_s \gamma_l^* I_1\left(\gamma_l^*\right) - \frac{C_s \gamma_t^* k^*}{\mu_t^*} I_1\left(\gamma_t^*\right) = C,$$

$$\left(-k^{*2}\left(1+\gamma_c^{(1)}\right)+\omega_1^2\right)A + \left(k^*\nu + \delta_c^{(1)}k^{*3}\right)C + \frac{2\left(1-\nu^2\right)}{Eh_*}\mu_s k^* \gamma_e^* I_1\left(\gamma_e^*\right)A_s -$$

$$-\frac{1-\nu^2}{Eh_*}\mu_s \gamma_t^*\left(\gamma_t^{*2}+k^{*2}\right)I_1\left(\gamma_t^*\right)C_s = 0$$

$$-\left(k^*\nu + \delta_c^{(1)}k^{*3}\right)A + \left(1+\gamma_s^{(2)}+\eta_{s1}^{(2)}+\eta_c^{(1)}k^{*4}+a^2k^{*4}-k^{*2}\overline{p}-\omega_1^2\right)C + \quad (9)$$

$$+\frac{2\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\left[\left(\frac{\lambda_s}{2\mu_s}\left(\gamma_e^{*2}-k^{*2}\right)+\gamma_e^{*2}\right)I_0\left(\gamma_e^*\right)-\gamma_e^* I_1\left(\gamma_e^*\right)\right]A_s +$$

$$+\frac{2\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\left[I_1\left(\gamma_t^*\right)-\gamma_t^* I_0\left(\gamma_t^*\right)\right]\gamma_t^* k^* C_s = 0$$

Системы (8) и (9) легко сводятся к системам:

в случае а):

$$\left[\left(-k^{*2}\left(1+\gamma_c^{(1)}\right)+\omega_1^2\right)\left(-k^{*2}I_1\left(k^*\right)-4\left(1-\nu_s\right)k^*I_0\left(k^*\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\left(2k^*I_0\left(k^*\right)+4\left(1-\nu_s\right)I_1\left(k^*\right)\right)-k^{*2}I_0\left(k^*\right)\left(\nu k^*+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)\right]A_s +$$

$$+\left[k^*I_0\left(k^*\right)\left(-k^{*2}\left(1+\gamma_c^{(1)}\right)+\omega_1^2\right)+k^*I_1\left(k^*\right)\left(\nu k^*+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)-\frac{\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}2k^{*2}I_1\left(k^*\right)\right]C_s = 0,$$

$$\left\{-\left(k^*\nu+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)\left(-k^{*2}I_1\left(k^*\right)-4\left(1-\nu_s\right)k^*I_0\left(k^*\right)\right)-k^{*2}I_0\left(k^*\right)\times\right. \quad (10)$$

$$\times\left(1+\gamma_s^{(2)}+\eta_{s1}^{(2)}+\eta_c^{(1)}k^{*4}+a^2k^{*4}-k^{*2}\overline{p}-\omega_1^2\right)+\frac{2\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\times$$

$$\left.\times\left[\left(2\nu_s-1\right)I_0\left(k^*\right)-I_1\left(k^*\right)\right]k^{*2}\right\}A_s + \left\{-\left(k^*\nu+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)k^*I_0\left(k^*\right)+\right.$$

$$+k^*I_1\left(k^*\right)\left(1+\gamma_s^{(2)}+\eta_{s1}^{(2)}+\eta_c^{(1)}k^{*4}+a^2k^{*4}-k^{*2}\overline{p}-\omega_1^2\right)+\frac{2\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\times$$

$$\left.\times\left[k^*I_0\left(k^*\right)-I_1\left(k^*\right)\right]k^*\right\}C_s = 0;$$

в случае б):

$$\left\{-\left(k^*\nu+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)k^*I_0\left(\gamma_l^*\right)+\left(1+\gamma_s^{(2)}+\eta_{s1}^{(2)}+\eta_c^{(1)}k^{*4}+a^2k^{*4}-k^{*2}\overline{p}-\omega_1^2\right)\gamma_l^*I_1\left(\gamma_l^*\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\left[\left(\frac{\lambda_s}{2\mu_s}\left(\gamma_e^{*2}-k^{*2}\right)+\gamma_e^{*2}\right)I_0\left(\gamma_e^*\right)-\gamma_e^*I_1\left(\gamma_e^*\right)\right]\right\}A_s+$$

$$+\left\{\left(k^*\nu+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)\frac{\gamma_t^{*2}}{\mu_t^*}I_0\left(\gamma_t^*\right)-\left(1+\gamma_s^{(2)}+\eta_{s1}^{(2)}+\eta_c^{(1)}k^{*4}+a^2k^{*4}-k^{*2}\overline{p}-\omega_1^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\gamma_t^*k^*}{\mu_t^*}I_1\left(\gamma_t^*\right)+\frac{2\left(1-\nu^2\right)\mu_s}{Eh_*}\left[I_1\left(\gamma_t^*\right)-\gamma_t^*I_0\left(\gamma_t^*\right)\right]\gamma_t^*k^*\right\}C_s=0, \qquad (11)$$

$$\left[\left(-k^{*2}\left(1+\gamma_c^{(1)}\right)+\omega_1^2\right)k^*I_0\left(\gamma_l^*\right)+\left(k^*\nu+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)\gamma_l^*I_1\left(\gamma_l^*\right)+\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{Eh_*}\mu_sk^*\gamma_e^*I_1\left(\gamma_e^*\right)\right]A_s-$$

$$\left[-\left(-k^{*2}\left(1+\gamma_c^{(1)}\right)+\omega_1^2\right)\frac{\gamma_t^{*2}}{\mu_t^*}I_0\left(\gamma_t^*\right)-\left(k^*\nu+\delta_c^{(1)}k^{*3}\right)\frac{\gamma_t^{*2}}{\mu_t^*}I_0\left(\gamma_t^*\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-\nu^2}{Eh_*}\mu_s\gamma_t^*\left(\gamma_t^{*2}+k^{*2}\right)I_1\left(\gamma_t^*\right)\right]C_s=0.$$

Из существования нетривиального решения системы (10) и (11) получим частотные уравнения:

$$\det\left|a_{ij}\right|=0\ \ (i,j=1,2)\ \text{ в случае а);} \qquad (12)$$

$$\det\left|b_{ij}\right|=0\ \ (i,j=1,2)\ \text{ в случае б).} \qquad (13)$$

Корни уравнений (12) и (13) найдены численно. Для параметров задачи были приняты:

$E=E_0=6{,}67\times10^9\ N/m^2$; $\rho_0=\rho_c=0{,}26\times10^4\ N\times s^2/m^4$; $\text{v}=0{,}3$; $L_1=800mm$;

$R=160mm$; $h=0{,}45mm$; $k=4$; $h_c=1{,}39mm$;

$h_s=1{,}90mm$; $F_c=3{,}4\,mm^2$; $F_s=5{,}2\,mm^2$; $I_{yc}=5{,}1\,mm^4$; $I_{kp.c}=0{,}23\,mm^4$;

$I_{xs}=300{,}8\ mm^4$; $\rho=10^3n\cdot s^2/m^4$; $a_e=2{,}25a_t, a_t=308\ m/san.$

Выводы. Исследование корней уравнений (12) и (13) показывает, что учет инерционных свойств среды приводит к снижению значения собственной частоты колебаний рассмотренной системы по сравнению с собственной частотой колебаний этой системы, когда среда безинерционная. Кроме того, анализ корня (14) показывает, что с увеличением значения сжимающей силы частоты собственных колебаний рассмотренной системы уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Киев: Наукова думка, 1980, 367с.
2. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1977, 331 с.
3. Латифов Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999, 164 с.
4. Мамедов Дж.Н. Свободные колебания цилиндрических оболочек с заполнителем, усиленными продольными ребрами при осевом сжатии с учетом дискретных размещений ребер // Министерство Образования Азербайджанской Республики. Механика машиностроения, 2007, № 4, с.7-11.
5. Джафарова И.М., Сейфуллаев Ф.А. Свободные колебания продольно подкрепленных цилиндрических оболочек с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения // Министерство Образования Азербайджанской Республики. Механика машиностроения, 2008 , №3 , с. 22 -25.
6. Латифов Ф.С., Джафарова И.М. Свободные колебания подкрепленных перекрестной системой ребер цилиндрических оболочек с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения // Естественные и технические науки, М.: 2009, № 5, с. 38-44.

SÜRTÜNMƏSİ NƏZƏRƏ ALINAN MÜHİTLƏ DOLDURULMUŞ, OXU BOYU SIXICI QÜVVƏNİN TƏSİRİNƏ MƏRUZ QALAN TİLLİ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN OXASİMMETRİK SƏRBƏST RƏQSLƏRİ

İ.M.CƏFƏROVA

XÜLASƏ

Məqalədə sürtünməsi nəzərə alınan mühitlə təmasda olan, sıxıcı qüvvənin təsirinə məruz qalan konstruktiv-ortotrop silindrik örtüyün oxasimmetrik sərbəst rəqslərinə baxılmışdır. Sistemi xarakterizə edən parametrlərin sistemin tezliklərinə təsiri öyrənilmişdir. Məxsusi tezliklərin dalğa ədədindən və sürtünmə əmsalından asılılıq qrafiki qurulmuşdur.

Açar sözlər: tilli silindrik örtüyün oxasimmetrik sərbəst rəqsləri, silindrik örtük, konstruktiv-ortotrop silindrik örtük.

A PROBLEM OF AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF A MEDIUM-FILLED RIBBED CYLINDRICAL SHELL LOADED BY AXIAL CONTRACTIVE FORCES AND WITH REGARD TO FRICTION

I.M.JAFAROVA

SUMMARY

One of the basic reasons that stimulate designers to strengthen thin shells by medium – filled ribs is stipulated by the necessity of security of their rigidity under the action of different type loads.

The paper is devoted to the investigation of free axisymmetric oscillations of filled, structurally-orthotropic cylindric shells reinforced by a discretely distributed cross system of ribs under axial compression and with regard to friction between the contact surfaces of a shell and a filler. Influence of external medium parameters on the eigen oscillations parameter of the system is analyzed. Dependence of eigen oscillations frequency on wave formation in longitudional direction and with regard to friction in the contact between a shell and a filler is constructed.

Key words: A problem of axisymmetric oscillations, cylindrical shell, structurally-orthotropic cylindric shells.

Поступила в редакцию 03.02.2010 г.
Принято к печати 10.03.2011 г.